Bourdon

1-a) On applique le th du moment cinétique à Bourdon ∪ la corde.

• masse corde négligeable $\rightarrow \sigma_\Delta = \sigma_{Bourdon} = J\dot{\theta}$

soumis à

• $\vec{F}$ de moment $+FR$ (bras de levier)

• poids de moment $-m_B g\, d\sin\theta$

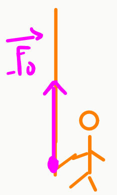
• réaction de l'axe de moment nul sans frottement

$$J_B\ddot{\theta} = FR - mg\,d\sin\theta = 0 \quad \text{équilibre}$$

1-b)

$$\boxed{d = \frac{F_0 R}{m_B g \sin\theta}} \qquad F_0 \rightarrow 5{,}7.10^3,\; R \rightarrow 0{,}5,\; m_B \rightarrow 10^3,\; g \rightarrow 9{,}8,\; \sin\theta \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{d = 70\text{ cm}}$$

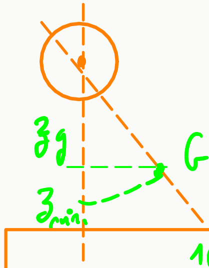


Action réciproques : l'individu est soumis à une $-\vec{F_0}$ avec $F_0 \gg m_i g \rightarrow$ il décolle.

2a) Théorème de l'énergie mécanique appliqué au bourdon ∪ corde. La seule force qui travaille est le poids, avec

$\mathcal{E}_p = mg(z_G - z_{min})$ avec $z_{min} = z_G$ en $\theta = 0$

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2$



$z_g - z_{min} = d(1-\cos\theta)$.

Conservation de Em :

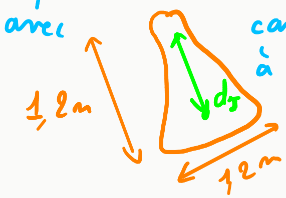
$\theta = \theta_0$; $\theta = 0$ (où $\dot{\theta}$ max)

$$0 + m_B g d(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 + 0$$

$$\boxed{J_B = \frac{2 m_B g d(1-\cos\theta_0)}{\omega_0^2} = 6{,}0.10^2\ kg\,m^2}$$

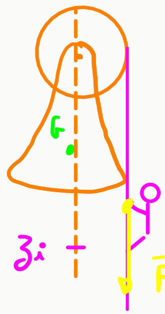
(m_B : 10^3 ; g : $9{,}8$; d : $0{,}7$; θ_0 : $45°$; ω_0 : $2{,}6$)

2-b) On calcule $\boxed{\sqrt{\frac{J_B}{m_B}} = 7{,}7.10^1\text{ cm} \equiv d_J}$. J_B est le même que pour 1 objet ponctuel de masse m_B, placé à d_J de l'axe. Compatible avec

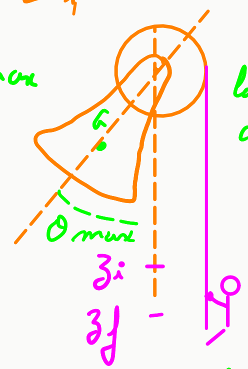


car toute la masse est à moins de $\sqrt{(1{,}2)^2 + 0{,}6^2} = 1{,}3$ m de l'axe.

3a) à $t=0$, $\theta = 0$



à $\theta = \theta_{max}$



Conservation de la longueur de la corde : $z_i - z_f = R\theta_{max}$

Th. de l'énergie mécanique au bourdon + corde

$\theta = 0$ $\dot{\theta} = 0$: $\mathcal{E}m_B = 0 + 0$

$\theta = \theta_{max}$ $\dot{\theta} = 0$: $\mathcal{E}m_B = 0 + m_B g d(1-\cos\theta)$

$\Delta\mathcal{E}m_B = $ travail de $\vec{F}_{i/B}$

Th de l'énergie mécanique à m_i.

$\theta = 0$, $z = z_i$, $\dot z = 0$: $\mathcal{E}_{m_i} = m_i g z_i$

$\theta = \theta_{max}$, $z = z_f$, $\dot z = 0$: $\mathcal{E}_{m_i} = m_i g z_f$

$\Delta \mathcal{E}_m$ = travail de $+\vec{F}_{B/} = -\vec{F}_{/B}$

$\Delta \mathcal{E}_{m_i} = -\Delta \mathcal{E}_{m_B} \rightarrow \mathcal{E}_{m_i} + \mathcal{E}_{m_B} = cte$ ← à réutiliser

$$\boxed{m_B g d (1-\cos\theta_{max}) = m_i g (z_i - z_f) = m_i g R\theta_{max}}$$

3b) On a $\dfrac{1-\cos\theta_{max}}{\theta_{max}} = \dfrac{m_i R}{m_B d} \ll 1 \rightarrow \theta_{max} \ll 1$

$1 - \cos\theta_{max} \underset{\theta \ll 1}{\approx} \dfrac{\theta_{max}^2}{2} \rightarrow$

$$\boxed{\theta_{max} \simeq \frac{2 m_i R}{m_B d} = 0{,}13 \text{ rad} = 7{,}2°}$$

75 ; 0,5 ; 10^3 ; 0,7

4a) Le problème est le même : force constante sur la corde égale à $\dfrac{m_i g}{2}$. $\theta'_{max} = \dfrac{m_i R}{m_B d}$.

Travail reçu par le bourdon : $\Delta \mathcal{E}_{m_B} = m_B g d (1 - \cos\theta'_{max})$ ≃ $\theta'^2_{max}/2$

$$\boxed{= W_{trad} \simeq \frac{m_B g d}{2}\left(\frac{m_i R}{m_B d}\right)^2 = \frac{g m_i^2 R^2}{2 m_B d} = 98 \text{ J}}$$

9,8 ; 75 ; 0,5 ; 10^3 ; 0,7

$W_{traction} = F\,\ell$ ← longueur de traction ($F = m_i g/2$)

$$\boxed{\ell = \frac{W}{F} = \frac{m_i R^2}{2 m_B d} = 1{,}3 \text{ cm}}$$

↑ c'est aussi $R\theta'_{max}$

4b) Quand l'individu a lâché la corde, mouvement conservatif du bourdon.

$\theta = \theta'_{max}$, $\dot\theta = 0$; θ, $\dot\theta$ } quelconques

$\mathcal{E}_{m_B} = m_B g d (1 - \cos\theta'_{max}) = \mathcal{E}_{m_B} = m_B g d (1-\cos\theta) + \frac{1}{2} J_B \dot\theta^2$

DL pour $\theta \ll 1$, $\theta'_{max} \ll 1$

$\frac{1}{2} J_B \dot\theta^2 + m_B g d \frac{\theta^2}{2} = m_B g d \frac{\theta'^2_{max}}{2}$; $\dot\theta^2 + \Omega^2\theta^2 = cte$, avec

$$\boxed{\Omega^2 = \frac{m_B g d}{J_B} = \frac{g d}{d_J^2}}$$

9,8 ; 70 ; 77

Oscillations harmoniques, il repasse en $\theta = 0$ au bout de

$$\boxed{\frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega} = 9{,}2 \cdot 10^{-1} \text{ s}}$$

4c) On veut atteindre $\mathcal{E}_{m_B} = m_B g d (1 - \cos\theta_0)$ en ajoutant n fois $W_{trad} = \dfrac{g m_i^2 R^2}{2 m_B d}$.

$n = \dfrac{\mathcal{E}_{m_B}}{W_{trad}} = \dfrac{2 m_B^2 d^2}{m_i^2 R^2} = 7{,}0 \cdot 10^2$

↑ nb de ½ oscillations. Chaque oscillation dure $\geq \frac{T_0}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{car leur période augmente avec l'amplitude.} \\ \text{Durée totale } T \geq \dfrac{n}{2} T_0 = \dfrac{n\pi}{\omega} = \left(\dfrac{m_B d}{m_i R}\right)^2 \dfrac{\pi d_J}{\sqrt{g d}} \\ = 5{,}3 \text{ min}\end{array}}$$

$\dfrac{J_B}{m_B} = 76$ cm ; 10^3 ; 75 ; 0,5 ; 0,7 ; 70 cm ; 9,8

On aura intérêt à utiliser davantage de sonneurs

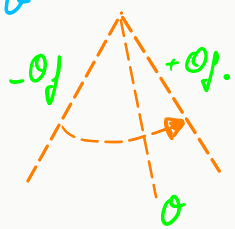
pour augmenter la force et diminuer la durée

5a) Travail élémentaire pour une rotation de $d\theta$

$\delta W_f = \ominus k\dot{\theta}^2 |d\theta|$

δf résistif

$(\delta W < 0$ pour $\begin{cases} d\theta < 0 \\ d\theta < 0 \end{cases}$



En négligeant l'effet de δf sur 1 $\frac{1}{2}$ oscillation

$$W_f = -\int_{-\theta_f}^{\theta_f} k\dot{\theta}^2\, d\theta \quad \text{et}$$

↑ car $d\theta > 0$

$$\begin{cases} \text{en } -\theta_f \\ \mathcal{E}m_B = 0 + m_B g d(1-\cos\theta_f) \\ \text{en } \theta \\ \mathcal{E}m_B = \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 + m_B g d(1-\cos\theta) \end{cases}$$

donc

$\frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 = m_B g d(\cos(\theta) - \cos(\theta_f))$ soit $W_f = -k\int_{\theta_f}^{\theta_f} \frac{2 m_B g d(\cos(\theta) - \cos(\theta_f))}{J_B} d\theta$

$$W_f = -\frac{2kgd}{d_J^2}\left(2\sin\theta_f - 2\theta_f\cos(\theta_f)\right) = \boxed{-\frac{4kgd}{d_J^2}\left(\sin\theta_f - \theta_f\cos(\theta_f)\right)}$$

5b) Pour entretenir le mouvement sur $[-\theta_f\ \theta_f]$, on doit avoir

sur 1 $\frac{1}{2}$ oscillation $\Delta \mathcal{E}m = 0 = W_f + W_{traction}$

$$\frac{\cancel{g} m_i^2 R^2}{2 m_B d} = \frac{4k\cancel{g}d}{d_J^2}\left(\sin\theta_f - \theta_f\cos\theta_f\right)$$

$$\boxed{K = \frac{m_i^2 R^2 d_J^2}{8 m_B d^2(\sin\theta_f - \theta_f\cos\theta_f)} = 2{,}8\ \text{kg m}^2}$$

m_i : 75 ; R : 0,5 ; d_J : 0,76 ; m_B : 10^3 ; d : 0,7 ; θ_f : 35